专业：[redacted]；班级：[redacted]；姓名：[redacted]；学号：[redacted] A

1. 设 A,B,C 为三事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列事件：

1）A,B,C 中至少一个发生表示为 $A\cup B\cup C$。

2）A,B,C 中恰好一个发生表示为 $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$。

3）A,B,C 中至多一个发生表示为 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$。

4）A,B,C 中至多一个不发生表示为 $ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}C$。

2. 设 A 和 B 为任意二事件，则 $P((\bar{A}\cup B)(A\cup B)(\bar{A}\cup\bar{B})(A\cup\bar{B}))=$ ϕ .

3. 设 A 和 B 为任意二事件，且 $P(A)+P(B)=0.9, P(AB)=0.2$，求 $P(\bar{A}B)+P(\bar{B}A)$

解：$P(A)+P(B)=0.9$

~~$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0.2$~~

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9-0.2=0.7$

$P(\bar{A}B)+P(\bar{B}A)$

$=P(A\cup B)-P(AB)$

$=0.7-0.2=0.5$

4. 设 A 和 B 为任意二事件，$P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A-B)=0.3$，

求 $P(A\cup B)$

解：$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=0.3$

$P(AB)=0.5-0.3=0.2$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.4-0.2=0.7$

5. 将 3 个球随机放入 4 个杯子，求杯子中球数的最大值分别为 1、2、3 的概率.

解：最大值为 1：$P=\dfrac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1}{4^3}=\dfrac{3}{8}$

最大值为 2：$P=\dfrac{C_3^2\cdot C_4^1\cdot C_3^1}{4^3}=\dfrac{9}{16}$

最大值为 3：$P=\dfrac{C_4^1}{4^3}=\dfrac{1}{16}$

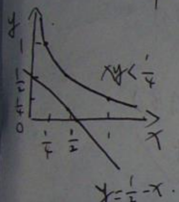
6. 100 件产品中有 10 见次品，从中任取 10 件，1)求其中恰有 5 见次品的概率；
2）求至少有 3 见次品的概率

解：(1) $P=\dfrac{C_{10}^{5}\cdot C_{90}^{5}}{C_{100}^{10}}$

(2) $P=1-\dfrac{C_{90}^{10}+C_{90}^{9}\cdot C_{10}^{1}+C_{90}^{8}\cdot C_{10}^{2}}{C_{100}^{10}}$

7. 从区间（0，1）中任取两个数，试求：1）两数之和小于 1/2 的概率.
2）两数之积小于 1/4 的概率.

解：(1) $P=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times 1}=\dfrac{1}{8}$



(2) $P=\dfrac{\frac{1}{4}\times 1\times 2-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}x(\frac{1}{4x}-\frac{1}{4})}{1\times 1}=\dfrac{29}{64}$

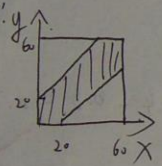
$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4$

8. 甲乙两人约好在 8 点到 9 点之间到某商店门前会面，先到者等 20 分钟后可自行离去，试求两人能会面的概率.

设 x,y 为甲.乙到达时刻

$|x-y|\le 20.$

解：



$P=\dfrac{60^2-40^2}{60^2}=\dfrac{5}{9}$

专业：[redacted]班级：[redacted]；姓名：[redacted]；学号：[redacted] B

1. 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A|\bar{B})=0.6$，求 $P(A\mid A\cup\bar{B})$

解：$P(A|A\cup\bar{B}) = \dfrac{P(A\cap(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})} = \dfrac{P(A\cap(A\cup\bar{B}))=P(A)}{P(A\cup\bar{B})} = \dfrac{0.5}{0.74} = \dfrac{25}{37}$

$\cancel{P(A\bar{B}) = P(A\bar{B}) = P(A|\bar{B})\cdot P(\bar{B}) = 0.36}$

$P(A\cup\bar{B}) = 0.5+0.6-0.36 = 0.74$

2. 已知 $P(A)=1/4, P(B|A)=1/3, P(A|B)=1/2$，求 $P(A\cup B)$

解：$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB) = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{1}{3}$，$\dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{1}{2}$

$P(AB) = \dfrac{1}{12}$　$P(B) = \dfrac{1}{6}$

3. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 1/9，且 $P(A\bar{B}) = P(B\bar{A})$，求 $P(A)$

解：$P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}) = \dfrac{1}{9}$　　$(1-P(A))^2 = \dfrac{1}{9}$

$P(A)\cdot P(\bar{B}) = P(B)\cdot P(\bar{A})$

$1-\dfrac{1}{9P(\bar{A})} - P(A) = 0$　　$P(A) = \dfrac{2}{3}$

4. 设袋中有 2 个白球，6 个红球共 8 个球，第一次从袋中任取 2 个球，然后放入 2 个白球，第二次从袋中任取 3 个球。求这 3 个球均为红球的概率。

解：①假如第一次取出2球均为白球，则 $P = \dfrac{C_6^3}{C_8^3} = \dfrac{5}{14}$

②假如第一次取出2球均为红球，则 $P = \dfrac{C_4^3}{C_8^3} = \dfrac{1}{14}$

③假如第一次取出2球为一红一白，则 $P = \dfrac{C_5^3}{C_8^3} = \dfrac{5}{28}$

结果！$P = \dfrac{5}{14}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_8^2} + \dfrac{1}{14}\cdot\dfrac{C_6^2}{C_8^2} + \dfrac{5}{28}\cdot\dfrac{C_2^1C_6^1}{C_8^2} = \dfrac{25}{196}$

5. 三人独立破译一份密码，以知个人能译出的概率分别为 $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，求至少有一人能译出密码的概率。

$P = 1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5} = \frac{3}{5}$

6. 设第一个盒中装有 5 只白球，4 只红球，3 只黑球；第二个盒中装有 3 只白球，4 只红球，5 只黑球。独立的分别从两个盒中任取一球。

1）恰好有一只白球的概率

2）求有一只白球一只红球的概率。

3）已知恰好有一只白球，求另一只是红球的概率。

解：(1) $P=\frac{5\times9+7\times3}{12\times12}=\frac{11}{24}$

(2) $P=\frac{5\times4+4\times3}{12\times12}=\frac{2}{9}$

~~(3) $P=\frac{\quad}{12\times12}$~~

(3) $P=\frac{\frac{2}{9}}{\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{12}+\frac{3}{12}\right)}}=\frac{16}{33}$

7. 设来自三个地区的报名表各 15 份、20 份、25 份，其中女生表各有 7 份、9 份、15 份. 今任取一地区的报名表，从中抽取两份报名表，

1）求第二张报名表为男生概率.

2）若已知第二张报名表为男生，那么求第一张报名表为女生的概率.

解：(1) $P=\frac{1}{3}\left(\frac{8}{15}+\frac{11}{20}+\frac{10}{25}\right)=\frac{89}{180}$

(2) $P=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}+\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{19}+\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}\right)\Big/\frac{89}{180}$ $\cancel{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{8}{15}+\frac{11}{20}+\frac{10}{25}\right)\right)}$ $\cancel{\frac{1}{6}\left(\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}+\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}+\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{19}+\frac{11}{20}\cdot\frac{10}{19}+\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}+\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}\right)}$

$=\frac{886}{1691}$

8. 设$0<P(B)<1$，证明：A、B 相互独立的充要条件是$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$.

证明：充分性

$\because P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

$\therefore \frac{P(AB)}{P(B)}+\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=1$

又 $\because P(A)+P(\bar{A})=1$.

~~∴ A.B相互独立.~~

$\therefore \frac{P(AB)}{P(B)}=P(A),\ \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}=P(\bar{A})$

$\therefore P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，即A.B相互独立.

必要性

$\because$ A.B相互独立

$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$；$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})$

$\therefore \cancel{P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})}$

$\cancel{=P(A)+P(\bar{A})=1}$

$\therefore P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=P(A)+P(\bar{A})=1$

∴综上，A.B相互独立的充要条件是$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$

专业：________，班级：________，姓名：________，学号：____________ B

1. 设随机变量X的分布律为：$P(X=k)=\lambda p^k (k=1,2,\cdots)$，其中 $\lambda>0$ 已知常数，

求则参数 p。

解：$P(X=1)+\cdots+P(X=k)=1$

$$\frac{p(1-p^k)}{1-p}=\frac{1}{\lambda}$$

$\because$ 当 $p\to+\infty$，$1-p^k=1$

$\therefore \frac{p}{1-p}=\frac{1}{\lambda}$ $\quad p=\frac{1}{1+\lambda}$

2. 设随机变量X服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$，求 λ .

解：$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$P(X=1)=P(X=2)$

$\lambda\cdot e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$

又 $\because \lambda>0$ $\quad\therefore \lambda=2$

3. 一房间有3扇同样大小的窗子，其中只有一扇窗子打开，现在房间中有一只鸟只能从开着的窗子飞出去。1）假定这只鸟有记忆，X表示这只鸟为了飞出房间试飞的次数，求X的分布律和分布函数；2）假定这只鸟没有记忆，Y 表示这只鸟为了飞出房间试飞的次数，求 Y 的分布律和分布函数

(1)解：$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{1}{3} & 1\le x<2\\ \frac{2}{3} & 2\le x<3\\ 1 & x\ge 3\end{cases}$$

$P(X=k)=\frac{1}{3}\quad (k=1,2,3)$

(2)解：$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{4}{27} & \cdots\end{pmatrix}$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{y-1} & y>0\end{cases}$$

$P(Y=k)=\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{3}\quad (k=1,2,3\cdots)$

分布函数？

4．设离散型随机变量X的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a & -1\le x<1\\ \frac{2}{3}-a & 1\le x<2\\ a+b & x\ge 2\end{cases}$，

且 $P(X=2)=0.5$，试求：　1）a,b；2）X 的分布律；3）$P(|X|<1)$

~~(1) 解：$0+a+\frac{2}{3}-a+a+b=1$~~

~~$a+b=\frac{1}{3}$~~

~~$\lim\limits_{x\to -1} F(x)=F(-1)$~~

~~$a=0$~~

~~$\therefore b=\frac{1}{3}$~~

(2) $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

(3) $P(|X|<1)=P(-1<X<1)$

$=F(1)-F(-1)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{3}$ ×

$P(|X|<1)=0$

(1) 解：$P(X=-1)=a$　$P(X=1)=\frac{2}{3}-a-a$

$P(X=2)=\frac{2}{3}-a=\frac{1}{2}$　$\therefore b=\frac{5}{6}$

~~$P(X=2)=$~~ $a=\frac{1}{6}$

$P(X\ge 2)=1=a+b$

5．设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}Ax & 0\le x<1\\ 2-x & 1\le x<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，

求：1) A；2) 分布函数 $F(x)$；3) $P(0.5<X<1.5)$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$A=1$

(2) $F(x)=\int_0^x x=\frac{1}{2}x^2\Big|$ ~~$_0^1=\frac{1}{2}\ (0\le x<1)$~~ $(0\le x<1)$

$F(x)=\int_1^x 2-x$ $=\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt+\int_0^1 f(t)\,dt+\int_1^x f(t)\,dt$ ~~$=(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2=\frac{1}{2}\ (1\le x<2)$~~

$=\frac{1}{2}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}=-\frac{x^2}{2}+2x-1$

$F(x)=0$　其它

$\therefore F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2}x^2 & 0\le x<1\\ -\frac{x^2}{2}+2x-1 & 1\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$

(3) $P(0.5<X<1.5)$

$=F(X=1.5)-F(X=0.5)$

~~$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$~~

$=-\frac{2.25}{2}+3-1-\frac{1}{8}$

$=\frac{3}{4}$

6. 已知随机变量 $X \sim e(1/3)$，现对 X 进行 3 次独立观测，求至少有一次观测大于 3 的概率

解：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

~~$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{1}{3}x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$~~

一次大于3的概率 $P(X>3)=\int_3^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx=\frac{1}{e}$

$P=1-(1-\frac{1}{e})^3$

$=\frac{1}{e^3}-\frac{3}{e^2}+\frac{3}{e}$

7. 已知 $X \sim N(1,4)$，问当 a 为何值时，$P(|X-a|<1)$ 最大。

解：∵标准正态分布曲线在对称轴处，$P(x)$ 最大

∴ $a=1$ 时，$P(|X-a|<1)$ 最大.

8. 设 $X \sim N(3,2^2)$，试求：1）$P(2<x<5); P(|X|>2)$；2) 若 $P(X>c)=P(X<c)$，求 c

解：(1) $P(2<X<5)$

$=P(-\frac{1}{2}<(X-3)/2<1)$

$=0.8413-(1-0.6915)$

$=0.5328$

$P(|X|>2)$

$=P((X>2)\cup(X<-2))$

$=P((X-3)/2>-\frac{1}{2})+P((X-3)/2<-\frac{5}{2})$?

$=1-0.6915+1-0.9938$

$=0.3137$ ×

$P(|X|>2)=1-P(-2<X<2)$

$=1-(1-0.6915)+(1-0.9938)$

$=0.6977$

(2) ∵ $P(X>c)=P(X<c)$

∴ $1-\phi(\frac{c-3}{2})=\phi(\frac{c-3}{2})$

∴ $c=3$

9. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=e^{-x}\quad x>0$，求 Y=lnX 的概率密度.

解：Y的取值范围为 $(-\infty,0]$

∴当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=1$

当 $y<0$ 时，

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\ln X\le y)$

$=P(X\le e^y)$

$=\int_0^{e^y}e^{-x}dx=-e^{-e^y}+1$

∴ $f_Y(y)=\begin{cases}-e^{-y}+e^{-y} & y<0\\ 0 & 其它\end{cases}$ ×

∴ $f_Y(y)=e^y\cdot e^{-e^y}$

10．假设随机变量 X 在区间[-1，3]上服从均匀分布，求 $Y=X^2$ 的密度函数.

解：随机变量Y的取值范围为[0,9]，

所以，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 9$ 时，$F_Y(y)=1$.

当 $0\le y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$$
$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$
$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{2}\sqrt{y}$$

当 $1\le y<9$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

$$=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})$$
$$=\int_{-1}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}(\sqrt{y}+1)$$

∴随机变量Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}} & 0<y<1\\ \frac{1}{8\sqrt{y}} & 1\le y<9\\ 0 & 其他\end{cases}$$

11．假设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1+x & -1\le x<0\\ 1-x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$，求 $Y=X^2+1$ 的密度函数.

解：随机变量Y的取值范围为[1,2]

所以，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

当 $1\le y<2$ 时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2+1\le y)$$
$$=P(-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1})$$
$$=\int_{-\sqrt{y-1}}^{0}(1+x)dx+\int_{0}^{\sqrt{y-1}}(1-x)dx$$
$$=-(-\sqrt{y-1}+\frac{1}{2}(y-1))+\sqrt{y-1}-\frac{1}{2}(y-1)$$
$$=2\sqrt{y-1}-y+1$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y-1}}-1 & 1<y<2\\ 0 & 其他\end{cases}$$

专业：[redacted] 班级：[redacted] 姓名：[redacted] 学号：[redacted] A

1．已知 $F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y)$ 是一联合分布函数，求常数 A、B、C.

解：由联合分布函数的性质 $F(-\infty,y)=0, F(x,-\infty)=0, F(+\infty,+\infty)=1$.

得到联立方程组
$$\begin{cases} A(B+\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0 & ① \\ A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0 & ② \\ A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1 & ③ \end{cases}$$

由方程③可知 $A\neq 0$，所以对任意的 x 都有

$(B+\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0$.

$$\therefore \begin{cases} C=\frac{\pi}{2} \\ B=\frac{\pi}{2} \\ A=\frac{1}{\pi^2} \end{cases}$$

2．某高校学生有 8 名委员，其中来自理科的 2 名，来自工科和文科的各 3 名。现从 8 名委员中随机地指定 3 名担任学生会主席。以 X 与 Y 分别表示 3 名主席中来自理科、工科的人数。（1）求（X，Y）的联合分布列；（2）求 X 与 Y 的边缘分布列。

解：(1) $P(X,Y)$ 表示 X 名理科，Y 名工科人数的概率

$P(0,0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$

$P(0,1)=\frac{C_3^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{9}{56}$

$P(0,2)=\frac{C_3^2\cdot C_3^1}{C_8^3}=\frac{9}{56}$

$P(0,3)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$

$P(1,0)=\frac{C_2^1\cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

$P(1,1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1}{C_8^3}=\frac{18}{56}=\frac{9}{28}$

$P(1,2)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_8^3}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

$P(2,0)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1}{C_8^3}=\frac{3}{56}$

$P(2,1)=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_8^3}=\frac{3}{56}$

（X，Y）的联合分布列

X\Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{9}{56}$	$\frac{1}{56}$
1	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	0
2	$\frac{3}{56}$	$\frac{3}{56}$	0	0

(2) 边缘分布

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

Y	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

3．设某汽车在车站的上客人数 $X\sim P(\lambda)$，每个人在中途下车的概率都为 p，且相互独立，以 Y 表示中途下车人数，

求：1）(X,Y) 的联合分布律

2）Y 的分布律

解：(1) $P(X=n,Y=m)=\begin{cases}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}C_n^m p^m(1-p)^{n-m} & (m\le n) \\ 0 & m>n\end{cases}$

$m=0,1,2,\cdots,n$　$n=0,1,2,\cdots$

(2) 设开始车上有 n 人，中途下车 m 人.

Y的分布律：$P(Y=m)=C_n^m p^m\cdot(1-p)^{n-m}$ ×

4. 设X, Y是相互独立，其联合分布律及边缘分布律如下表，试将其余的数值填出.

Y \ X	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	1/8	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{24}$	1/8	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	1/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

5. 把一枚均匀色子独立地抛掷两次，以X表示第一次出现的点数，Y表示两次出现的点数的最大值。

（1）写出X与Y的联合分布列；

（2）写出X与Y的边缘分布列；

（3）计算概率P（X=Y）.

解：(1)(2) X与Y的联合分布列及边缘分布列

Y \ X	1	2	3	4	5	6	P_i
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$		
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$		
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$		
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$		
P_j	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$		

解：(1).(2) X与Y的联合分布列及边缘分布列

Y \ X	1	2	3	4	5	6	P_j
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	0	0	0	0	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{5}{36}$	0	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{36}$
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(3) $P(X=Y)=\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}+\frac{1}{6}$

$=\frac{7}{12}$

6. 设 A 、B 为随机事件， $P(A)=1/4, P(B)=1/3, P(A|B)=1/2$. 令

$X=\begin{cases}1, & A\\ 0, & \bar{A}\end{cases}$, $Y=\begin{cases}1, & B\\ 0, & \bar{B}\end{cases}$, 求(X, Y)的联合分布律.

~~解：$P(X=1)=\frac{1}{4}$~~

~~$P(X=0)=\frac{3}{4}$~~

~~$P(Y=1)=\frac{1}{3}$~~

~~$P(Y=0)=\frac{2}{3}$~~

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(X, Y)的联合分布律.

X \ Y	0	1	P_i
0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
P_j	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

解：$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A|B)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)=\frac{1}{6}$ $\quad P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}$

$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{12}$ $\quad P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{7}{12}$

专业：[redacted] 班级：[redacted]；姓名：[redacted] 学号：[redacted]

A

1．设 X, Y 的联合分布律为

Y \ X	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知事件 {X=0}, {X+Y = 1} 相互独立，求 a、b.

解. $P(X=0)=0.4+b$

$P(X+Y=1)=a+b$

$P(X=0, X+Y=1)=b$

∵事件 $\{X=0\}$, $\{X+Y=1\}$ 相互独立

∴ $(0.4+b)(a+b)=b$

又∵ $a+b=0.5$

∴ $\begin{cases} b=0.4 \\ a=0.1 \end{cases}$

2．设二维随机变量（X，Y）的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-2x-3y} & (0<x, 0<y) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

（1） 求常数 A；

（2） 求（X，Y）的联合分布函数；

（3） 计算概率 P（X＋Y<2），P（X>Y），P（X>2Y｜ X>Y）；

（4） 判断 X 与 Y 的独立性。

解：(1) $\iint Ae^{-2x-3y}=1$

$A=6$

(2) $f(x)=2e^{-2x}$ $x>0$

$f(y)=3e^{-3y}$ $y>0$

$F(x,y)=F(x)\cdot F(y)=\int f(x)\cdot\int f(y)$

$=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y})$ $(x>0, y>0)$

$F(x,y)=0$ x, y取其他值

(3) $P(X+Y<2)=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}6e^{-2x-3y}dy$

$=1-3e^{-4}+2e^{-6}$

$P(X>Y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{x}6e^{-2x-3y}dxdy=\frac{3}{5}$

$P(X>2Y|X>Y)=\dfrac{P(X>2Y, X>Y)}{P(X>Y)}$

$=\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{7}$

(4) X与Y相互独立.

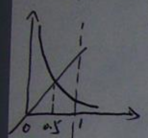
3．某公司生产的某种化工原料的月平均价格 X（单位：万元/公斤）和月销售量 Y（单位：t）都是随机变量，其联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}24y(1-x) & (0<x<1,0<y<x)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases}$$

1）求公司一个月销售此种产品的总收入超过 500 万元的概率；

2）求月平均价格 X 的密度函数。

解：(1) $XY>0.5$



$P(XY>0.5)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2x}}^{x}24y(1-x)dy$

$=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}(12x^2-12x^3-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x})dx$

$=\frac{19}{4}+\frac{3}{2}\ln 2-4\sqrt{2}$

(2) 月平均价格 X 的密度函数。

$f_X(x)=\int_0^x f(x,y)\,dy=12x^2(1-x)$

即 $f_X(x)=\begin{cases}12x^2(1-x) & 0<x<1\\ 0 & 其他.\end{cases}$

4. 设二维随机变量（X，Y）服从区域 G=｛(x，y)｜0<x<2，0<y<1｝上的均匀分布，试求边长为 X 与 Y 的矩形面积 S 的密度函数 $f_S(s)$。

解：二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$\varphi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x,y)\in G\\ 0 & (x,y)\notin G\end{cases}$

设 $F(s)=P(S\le s)$ 为 S 的分布函数，则当 $s\le 0$ 时，$F(s)=0$，当 $s\ge 2$ 时，$F(s)=1$.

设 $0<s<2$. 曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点 $(s,1)$，位于曲线 $xy=s$ 上方的点满足 $xy>s$，位于曲线下方的点满足 $xy<s$，于是

$F(s)=P(XY\le s)=1-P(XY>s)$

$=1-\iint_{xy>s}\frac{1}{2}dxdy$

$=1-\frac{1}{2}\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^{1}dy$

$=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s)$

$\therefore f_S(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s) & 0<s<2\\ 0 & (s\le 0 或 s\ge 2)\end{cases}$

5. 设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，且都服从区间[0,a]上均匀分布，令 Z=max｛X_1，X_2，X_3｝，Y=min｛X_1，X_2，X_3｝，分别求 Z 与 Y 的密度函数。

解：X_i 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{a}x & 0\le x<a\\ 1 & x\ge a\end{cases}$

$Z=F_{max}(x)=F(X\ge X_1)\cdot F(X\ge X_2)\cdot F(X\ge X_3)$

$=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{a^3}x^3 & 0\le x<a\\ 1 & x\ge a\end{cases}$

$Y=F_{min}(x)=F(X\le X_1)\cdot F(X\le X_2)\cdot F(X\le X_3)$

$=1-(1-F(x))^3=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-(1-\frac{x}{a})^3 & 0\le x<a\\ 1 & x\ge a.\end{cases}$

$\therefore f_Z(x)=\begin{cases}\cancel{\frac{3}{a}x^2}\ \frac{3}{a^3}x^2 & 0\le x<a\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f_Y(x)=\begin{cases}\frac{3}{a}(1-\frac{1}{a}x)^2 & 0\le x<a.\\ 0 & 其他\end{cases}$

5. 设 $X_i \sim N(1, 4)$ $(i=1, 2, 3, 4)$，且诸 X_i 相互独立，令 $Z=X_1+2X_2+3X_3+4X_4$，求概率 $P(5 \leqslant Z \leqslant 15)$。∵正态分布可加，∴ $\mu = (1+2+3+4) \times 1 = 10$，$\sigma^2 = (1^2+2^2+3^2+4^2) \times 4 = 120$

解：$Z \sim N(10, 120)$

$$\therefore P(5 \le Z \le 15) = P\left(\frac{-5}{\sqrt{120}} \le \frac{Z-10}{\sqrt{120}} \le \frac{5}{\sqrt{120}}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{120}}\right) - 1$$

$$= 2 \times 0.6772 - 1$$

$$= 0.3544$$

6. 设 $X \sim N(0,\sigma^2), Y \sim N(0,\sigma^2)$ 且相互独立，求 $Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 的分布.

解：由X与Y相互独立，

∴ (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

∵ $Z = \sqrt{X^2+Y^2}$

∴ $Z \in [0, +\infty)$

∴ 当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$

当 $z \geq 0$ 时，$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X^2+Y^2 \le z^2)$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le z^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

∴ 其分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} & 0 \le z \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

7. 设随机变量 X,Y 的联合密度函数为 $f(x,y)=1/2, (0<x<2, 0<y<1)$，令

$$U=\begin{cases} 0 & X \le Y \\ 1 & X > Y \end{cases}, V=\begin{cases} 0 & X \le 2Y \\ 1 & X > 2Y \end{cases},$$

求：1) (U,V) 的联合分布律；2) $P(U=V)$

解：(1) $P(U=0, V=0) = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y) dy = \frac{1}{4}$

$P(U=1, V=0) = \int_0^1 dy \int_y^{2y} f(x,y) dx = \frac{1}{4}$

$P(U=0, V=1) = 0$

$P(U=1, V=1) = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y) dy = \frac{1}{2}$

∴ (U,V) 的联合分布律为.

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

(2) $P(U=V) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4}$

8．将两封信投入三个编号为1、2、3的信筒，用X, Y分别表示1、2号信筒中信的个数. 求1）(X, Y)的联合分布律；2）判定X, Y是否相互独立；

3）求S=XY的分布律.

解：(1) (X, Y)的联合分布律

X\Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

$\because P(X)\cdot P(Y)\neq P(X,Y)$

(2) $\therefore$ X, Y不相互独立.

(3) $S=XY$的分布律

XY	0	1
P	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$

9．设X～U(0,1)，Y～e(1)且X与Y相互独立，试求下列函数的密度函数：

（1）Z=X+Y；（2）Z=X−Y。

解：(1) X的概率密度函数为

$$P(x)=\begin{cases}1 & x\in(0,1)\\ 0 & 其他\end{cases}$$

Y的概率密度函数为

$$P(y)=\begin{cases}e^{-y} & y\geq 0\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$f(z)=\int_0^z e^{-y}dy=1-e^{-z}\quad 0<z<1$$

$$f(z)=\int_{z-1}^z e^{-y}dy=e^{1-z}-e^{-z}\quad z\geq 1$$

$$f(z)=0$$

$$\therefore f(z)=\begin{cases}e^{1-z}-e^{-z} & z\geq 1\\ 1-e^{-z} & 0<z<1\\ 0 & z\leq 0\end{cases}$$

(2) 由$Z=X-Y$ 即 $Y=X-Z$

当$z>1$时，$F_Z(z)=1$

当$0<z\leq 1$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\leq z} f(x,y)dxdy$

$=1-\int_z^1 dx\int_0^{x-z} e^{-y}dy$

$=1-e^{z-1}+z.$

当$z\leq 0$时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x-y\leq z} f(x,y)dxdy$

$=\int_0^1 dx\int_{x-z}^{+\infty} e^{-y}dy$

$=e^{z}-e^{z-1}$

$$\therefore f(z)=\begin{cases}e^{z}-e^{z-1} & z\leq 0\\ 1-e^{z-1} & 0<z\leq 1\\ 0 & z>1\end{cases}$$

一、填空题(6 小题，每题 5 分)

1. 已知$P(A)=0.5, P(B)=0.4, AB=\phi$，则$P(A-B)=$ 0.5 。

2. 在区间[0,1]内任取两点，则两点距离小于 1/3 的概率为 $\frac{5}{9}$

3. 已知随机变量$X\sim e(1/4)$，现对X进行 3 次独立观测，则至少有一次观测值小于 4 的概率为 $1-e^{-3}$ 。

4. 设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，且均为$B(1,0.6)$，令$Y=X_1X_1\cdots X_n$ 则Y的分布律为 $C_n^k\ 0.6^k 0.4^{n-k}$

5. 某射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为$\frac{65}{81}$，试求该射手的命中率为 $\frac{1}{3}$ 。

6. 设随机变量X, Y独立同分布$\sim U(-2,0)$，则$Z=\min\{X,Y\}$的分布函数为

$F_Z(z)=$ $\cancel{\begin{cases} 0 & x<-2 \\ 1-(1-\frac{1}{2}x)^3 & -2<x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases}}$ 。 $\begin{cases} 0 & 其他 \\ (1-\frac{1}{2}x)^2 & -2<x<0 \end{cases}$

二、(10 分)将 4 个球随机放入 5 个盒子中，求恰有一个盒子中含有 2 个球的概率。

解: $p=\frac{C_4^2\cdot C_5^1\cdot C_4^1\cdot C_3^1}{5^4}=\frac{72}{125}$

三、(10 分)设袋中有 2 个白球，5 个红球共 7 个球，第一次从袋中任取 2 个球，然后放入 2 个白球，第二次从袋中任取 3 个球。求这 3 个球均为红球的概率。

解: 第一次取出两球均为白球，$P_1=\frac{C_2^2}{C_7^2}$

第一次取出两球均为红球，$P_1=\frac{C_5^2}{C_7^2}$

第一次取出两球为一红一白，$P_1=\frac{C_2^1C_5^1}{C_7^2}$

$\therefore p=\frac{1}{C_7^2}\cdot\frac{C_5^3}{C_7^3}+\frac{C_5^2}{C_7^2}\cdot\frac{C_3^3}{C_7^3}+\frac{10}{C_7^2}\cdot\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{49}$

四、(10 分)设$P(A)=0.4, P(A|B)=a, (0<a<1)$，又$A$发生而$B$不发生的概率与$B$发生而$A$不发生的概率相等。求 1) $P(B|A\cup\bar{B})$；2) a取何值时，$\bar{A}$与B相互独立？

解: $P(A)=0.4$ (2) $a=0.4$

$P(B)=0.4$

(1) $P(B|A\cup\bar{B})=\cancel{\frac{P(B)\cdot P(A\cup\bar{B})}{P(A\cup\bar{B})}}\ \frac{P(B\cap(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A\cup\bar{B})}=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})}$

$\cancel{=P(B)=0.4}$

$=\frac{P(AB)}{P(A)+P(\bar{B})-P(A)+P(AB)}$

$=\frac{2a}{2+2a}$

五．（8 分）设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}1/4 & -1\le x<1\\ 1/2 & 1\le x<2\\ 0 & 其他\end{cases}$，令 $Y=\dfrac{X}{3}$，

求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$。

$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4} & -\frac{1}{3}\le y<\frac{1}{3}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{3}\le y<\frac{2}{3}\\ 0 & 其他\end{cases}$

$Y\in[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ $\quad Y=\frac{X}{3}$

解：

$Y\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\frac{X}{3}\le y)=P(X\le 3y)$

$=\frac{3}{4}y$

$Y\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ $\quad F_Y(y)=\frac{3}{2}y$

六．（12 分）设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，其概率密度分别为：$f_X(x)=\lambda e^{-\lambda x}$，$x>0$，

$f_Y(y)=\alpha e^{-\alpha y}$，$y>0$ 令 $Z=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$，$W=\begin{cases}1, & X\le 2Y\\ 0, & X>2Y\end{cases}$，求 Z,W 的联合分布律.

解：

$P(Z=1,W=1)=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}\alpha\lambda e^{-(\lambda x+\alpha y)}dy=\frac{\lambda}{\lambda+\alpha}$

$P(Z=1,W=0)=0$

$P(Z=0,W=0)=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\frac{x}{2}}\alpha\lambda e^{-(\lambda x+\alpha y)}dy=1-\frac{2\lambda}{\alpha+2\lambda}=\frac{\alpha}{\alpha+2\lambda}$

$P(Z=0,W=1)$

$=\int_0^{+\infty}dy\int_y^{2y}\alpha\lambda e^{-(\lambda x+\alpha y)}dx$

$=\frac{\alpha}{\alpha+\lambda}-\frac{\alpha}{2\lambda+\alpha}$

七．（10 分）设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=e^{-x},(0<y<x)$，

求 1）边缘密度函数 $f_X(x),f_Y(y)$，并判定 X 与 Y 是否独立；2）$P(Y>3|X=5)$

解：(1) $f_X(x)=\int_0^x f(x,y)dy=1-e^{-x}$

$f_Y(y)=\int_y^{+\infty}f(x,y)dx=e^{-y}$

不独立.

(2) $P(Y>3|X=5)=\dfrac{P(Y>3,X=5)}{P(X=5)}$

$=\dfrac{\int_3^5 dy\int_y^5 e^{-x}dx}{\int_0^5 dx\int_x^5 e^{-x}dy}$

$=\dfrac{2e^{-5}-e^{-3}}{4+e^{-5}}$

八．（10 分）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从参数为1的指数分布，求 $Z=2X+2Y$ 的密度

解：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)} & x>0,y>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

$F(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le\frac{z}{2})$

$=\int_0^{\frac{z}{2}}dy\int_0^{\frac{z}{2}-y}e^{-(x+y)}dx$

$=1-(\frac{z}{2}+1)e^{-\frac{z}{2}}$

$\therefore f(z)=\begin{cases}\frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}} & z\ge 0\\ 0 & 其他\end{cases}$

专业：________ 班级：________；姓名：________ 学号：________ A

1. 设随机变量 X,Y 的联合分布律为

Y \ X	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
1	0.3	0.2	0.2

求：$EX;E(X/Y);E(X^2+Y)$

解：$EX = 0.5\times1 + 0.3\times2 + 0.2\times3 = 1.7$

$E(X/Y) = -1\times0.2 + 1\times0.3 + 2\times0.2 - 2\times0.1 + 3\times0.2$

$= 0.9$

$E(X^2+Y) = 2\times0.3 + 3\times0.1 + 5\times0.2 + 10\times0.2$

$= 0.6 + 0.3 + 3 = 3.9$

2. 设随机变量 $X\sim p(\lambda)$，1）求 $E(2^{-X})$；2）若 $E[(X-1)(X-2)]=1$，求 λ.

由 $X\sim P(\lambda)$ 故 X 的分布列为 $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

解：(1) $E(2^{-X}) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{k!}e^{-\lambda}$

$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\frac{\lambda}{2})^k}{k!}$

$= e^{-\lambda}\cdot e^{\frac{\lambda}{2}} = e^{-\frac{\lambda}{2}}$

(2) $E[(X-1)(X-2)] = E[X^2-3X+2]$

$= E(X^2) - 3E(X) + 2$

$= (\lambda^2+\lambda) - 3\lambda + 2 = 1$

又 $\because \lambda>0$

$\therefore \lambda = 1$

3. 设随机变量 $X \sim e(2)$，$Y \sim U(0,2)$，1）求 $E(X+Y), E(3X-3Y^2+1)$；

2）若 X, Y 相互独立，求 $E(X+Y)(2X-Y+1)$。

解：(1) $f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x} & (x>0) \\ 0 & (x\le 0) \end{cases}$

$f(y)=\begin{cases} \frac{1}{2} & (0<y<2) \\ 0 & 其他 \end{cases}$

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$=\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-2x}dx+\int_0^2 y\cdot\frac{1}{2}dy$

$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$E(3X-3Y^2+1)=3E(X)-3E(Y^2)+1$

$=3\times\frac{1}{2}-4+1=-\frac{3}{2}$

(2) $E(X+Y)(2X-Y+1)$

$=E(X+Y)\cdot E(2X-Y+1)$

$=\frac{3}{2}\cdot(1-1+1)$

$=\frac{3}{2}$ $\frac{5}{3}$

$E(X+Y)(2X-Y+1)$

$=E(2X^2+XY-Y^2+X+Y)$

$=\frac{5}{2}-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}$

4. 设随机变量 X, Y 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases} 12y^2 & (0<y<x<1) \\ 0 & 其他 \end{cases}$，

求 $EX; E(XY); E(X^2+Y^2)$。

解：$EX=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 12y^2dy$

$=\int_0^1 4x^4dx=\frac{4}{5}$

$E(XY)=\int_0^1 dx\int_0^x xy\cdot 12y^2dy$

$=\int_0^1 3x^5dx$

$=\frac{1}{2}$

$E(X^2+Y^2)=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)\cdot 12y^2dy$

$=\int_0^1 (4x^5+\frac{12}{5}x^5)dx$

$=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}$

5. 设随机变量 X,Y 的联合分布律为

Y \ X	-1	0	1
-1	α	1/8	1/4
1	1/8	1/8	β

证明：$E(XY)=0$

证明: $E(XY) = \alpha \cancel{*} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \beta = \alpha + \beta - \frac{3}{8}$

$\because \alpha + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \beta = 1$

$\therefore \alpha + \beta = \frac{3}{8}$

$\therefore E(XY) = \frac{3}{8} - \frac{3}{8} = 0$

6. 将 N 个球随机的放入 N 个盒中，每球落入各盒是等可能的，有球盒子数的数学期望.

解: 设有球的盒子数为 X.

设 $X_i = \begin{cases} 0 & 第i个盒子无球 \\ 1 & 第i个盒子有球 \end{cases}$

$i=1,2,\cdots,N$

则 $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, X_i的分布律为

~~X 0 1~~

~~P_i $\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$~~

X	0	1
P_i	$\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$	$1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$

$E(X_i) = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, \quad i=1,2,\cdots,N$

$\therefore E(X) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = N\left[1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n\right]$

7. 假设一台机器在一天内发生故障的概率为 0.3，机器发生故障时全天停止工作. 若一周 5 个工作日无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障可获利润 5 万元；发生二次故障可获利润 0 万元；发生三次或三次以上故障，亏损 2 万元. 试求一周内期望利润是多少.

解：设利润为 X 万元

$$P(X)=\begin{cases}0.7^5 & (X=10)\\ C_5^1\cdot 0.7^4\times 0.3 & (X=5)\\ C_5^2\cdot 0.7^3\times 0.3^2 & (X=0)\\ C_5^3\cdot 0.7^2\cdot 0.3^3+C_5^4\times 0.7\times 0.3^4+C_5^5\times 0.3^5 & (X=-2)\end{cases}=\begin{cases}0.16807 & (X=10)\\ 0.36015 & (X=5)\\ 0.3087 & (X=0)\\ 0.16308 & (X=-2)\end{cases}$$

$$E(X)=10\times 0.7^5+C_5^1\times 0.7^4\times 0.3\times 5+C_5^2\times 0.7^3\times 0.3^2\times 0+2\times(C_5^3\times 0.7^2\times 0.3^3+C_5^4\times 0.7\times \ldots C_5^5\times 0.\ldots$$

$$=0.16807\times 10+0.36015\times 5+0.3087\times 0+0.16308\times(-2)$$

~~$=3.16329$ (万元)~~

$=3.15529$ (万元)

8. 设某种商品的需求量 $X\sim U[10,30]$，商店每销售一单位该商品获利 500 元，若供大于求则削价处理，每处理一单位商品亏损 100 元，若供不应求则可从外部调剂供应，此时每单位商品获利 300 元，问商店进多少该商品才能使商店所获利润的期望值最大.

解：设进货量为 N，则利润为

$$T=\begin{cases}500N+300(X-N) & (N<X\le 30)\\ 500X-100(N-X) & (10\le X\le N)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}300X+200N & (N<X\le 30)\\ 600X-100N & (10\le X\le N)\end{cases}$$

$$E(T)=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}T\,dx$$

$$=\frac{1}{20}\int_{10}^{N}(600x-100N)\,dx+\frac{1}{20}\int_{N}^{30}(300x+200N)\,dx$$

$$=\frac{1}{20}\left(600\times\frac{x^2}{2}-100Nx\right)\Big|_{10}^{N}+\frac{1}{20}\left(300\cdot\frac{x^2}{2}+200Nx\right)\Big|_{N}^{30}$$

$$=-7.5N^2+350N+5250$$

当 $N=-\frac{b}{2a}=\frac{350}{15}\approx 23$

∴当进 23 件商品时，利润的期望值最大

专业：[redacted]；班级：[redacted]；姓名：[redacted]；学号：[redacted] A

1．已知随机变量 $X \sim N(-3,1), Y \sim N(2,4)$，且 X 与 Y 相互独立，设随机变量 $Z = X - 2Y$。求 $COV(Y,Z)$ 以及 $D(Z)$。

解：$COV(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z)$

$= E(Y(X-2Y)) - E(Y)E(X-2Y)$

$= E(XY) - E(2Y^2) - E(Y)E(X) + E(Y)E(2Y)$

∵ X与Y相互独立

∴ $E(XY) = E(X)E(Y)$

∴ $COV(Y,Z) = -2[E(Y^2) - [E(Y)]^2] = -2D(Y) = -2\times4 = -8$

$D(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$= E[(X-2Y)^2] - [E(X-2Y)]^2$

$= E(X^2) - [E(X)]^2 + 4[E(Y^2) - (E(Y))^2]$

$= D(X) + 4D(Y)$

$= 1 + 4\times4 = 17$

2. 已知 $X \sim N(1,9), Y \sim N(0,16), \rho_{XY} = -1/2$，设 $Z = X/3 - Y/2$，求 $D(Z)$。

解：$D(Z) = D(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}) = \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) - 2Cov(\frac{X}{3}, \frac{Y}{2})$

$= \frac{1}{9}\times9 + \frac{1}{4}\times16 - \frac{1}{3}Cov(X,Y)$

$= 5 - \frac{1}{3}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 5 - \frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times3\times4 = 7$

3. 设（X,Y）服从二维正态分布 $N(0,1,4,9,1/2), W = 2X + Y, V = X - 3Y$，

求(W, V)的联合分布及 $E(WV)$.

解：$E(W) = 2E(X) + E(Y) = 1$

$E(V) = E(X) - 3E(Y) = -3$

$D(W) = D(2X+Y) = 4D(X) + D(Y) + 4Cov(X,Y)$

$= 4\times4 + 9 + 4\times\frac{1}{2}\times2\times3 = 37$

$D(V) = D(X-3Y) = D(X) + 9D(Y) - 6Cov(X,Y)$

$= 4 + 9\times9 - 6\times\frac{1}{2}\times2\times3$

$= 67$

$Cov(W,V) = Cov(2X+Y, X-3Y)$

$= 2Cov(X,X) - 5Cov(X,Y) - 3Cov(Y,Y)$

$= 2D(X) - 5Cov(X,Y) - 3D(Y)$

$= 2\times4 - 5\times\frac{1}{2}\times2\times3 - 3\times9$

$= -34$

∴ $\rho_{W,V} = \frac{Cov(W,V)}{\sqrt{D(W)}\sqrt{D(V)}} = -\frac{34}{\sqrt{2479}}$

∴ (W,V)的联合分布服从二维正态分布 $(1, -3, 37, 67, -\frac{34}{\sqrt{2479}})$

$E(WV) = Cov(W,V) + E(W)E(V)$

$= -37$

4. 若 $X \sim N(3,1)$，估计 $P(|X-3| > 2) \le$ $\frac{1}{4}$ 。

$(\frac{1}{2})^2$ $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

5. 设（X,Y）服从二维正态分布，$W = X - aY, V = X + aY$，问 a 满足什么条件才能保证 W, V 相互独立.

解：$E(W) = E(X) - aE(Y) = \mu_X - a\mu_Y$

$E(V) = E(X) + aE(Y) = \mu_X + a\mu_Y$

$D(W) = D(X - aY) = D(X) + a^2 D(Y) - 2a\,Cov(X,Y)$

$= \sigma_X^2 + a^2\sigma_Y^2 - 2a\rho\sigma_X\sigma_Y$

$D(V) = D(X + aY) = D(X) + a^2 D(Y) + 2a\,Cov(X,Y)$

$= \sigma_X^2 + a^2\sigma_Y^2 + 2a\rho\sigma_X\sigma_Y$

$\therefore W \sim N(\mu_X - a\mu_Y, \sigma_X^2 + a^2\sigma_Y^2 - 2a\rho\sigma_X\sigma_Y)$

$V \sim N(\mu_X + a\mu_Y, \sigma_X^2 + a^2\sigma_Y^2, 2a\rho\sigma_X\sigma_Y)$

且 (W,V) 服从二维正态分布，正态随机变量 W 与 V 相互独立的充要条件是相关系数 $\rho_{W,V} = 0$，如果 $Cov(W,V) = 0$，则 W 和 V 相互独立

$Cov(W,V) = Cov(X - aY, X + aY) = Cov(X,X) + a\,Cov(X,Y) - a\,Cov(X,Y) - a^2 Cov(Y,Y)$

$= D(X) - a^2 D(Y)$

$= \sigma_X^2 - a^2\sigma_Y^2$

当 $a^2 = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ 时，W, V 相互独立

6. 设 $W = (aX + 3Y)^2, EX = EY = 0, DX = 4, DY = 16, \rho_{XY} = -0.5$，求常数 a 使 EW 最小.

解：$E(W) = E[(aX + 3Y)^2]$

$= E(a^2X^2 + 6aXY + 9Y^2)$

$= a^2E(X^2) + 6aE(XY) + 9E(Y^2)$

$= 4a^2 + 6aE(XY) + 144$

$E(XY) = \rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} + E(X)E(Y)$

$= -0.5 \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = -4$

$\therefore E(W) = 4a^2 + 6a(-4) + 144 = 4a^2 - 24a + 144$

$\frac{dE(W)}{da} = 8a - 24 = 0 \qquad a = 3$

$\because \frac{d^2[E(W)]}{da^2} = 8 > 0$

$\therefore$ 成立

$\therefore a = 3$ 使 $E(W)$ 最小

专业：[redacted] 班级：[redacted] 姓名：[redacted] 学号：[redacted] A

1. 设 $X_1, X_2, \cdots X_n \cdots$ 相互独立且均服从参数为 λ 的伯松分布，证明：$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从大数定律.

证明：令 $Y_i = \frac{1}{2}X_i^2 \ (i=1,2,\cdots)$

则 $Y_1, Y_2, \cdots$ 相互独立且具有同分布，由辛钦大数定理知，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ 依概率收敛于

$E(Y_i) = \frac{1}{2}(\lambda+\lambda^2)$

$\therefore \left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right\}_{n=1}^{+\infty}$ 依概率收敛于 $\frac{1}{2}(\lambda+\lambda^2)$

$\therefore \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从大数定律.

2. 生产灯泡的合格率为 0.6，求 10000 个灯泡中合格灯泡数在 5800 到 6200 的概率。

解：$E(X) = np = 6000$

$D(X) = npq = 2400$

$$P\{5800 < X < 6200\} = P\{|X-6000| < 200\} \geq 1 - \frac{2400}{200^2} = 0.94$$

3. 某运输公司有 500 辆汽车参加保险，在一年里汽车出事故的概率为 0.006，参加保险的汽车每年交保险费 800 元，若出事故保险公司最多赔偿 50000 元，试利用中心极限定理计算，1）保险公司倒闭的概率；2）保险公司一年赚钱不小于 200000 元的概率。

解：以 X 表示这 500 辆车中的出事故车辆数。

令 $X_i = \begin{cases} 1 & 第 i 辆车出事故 \\ 0 & 不出事 \end{cases}$ $i=1,\cdots,500$

则 $X_i \sim B(1, 0.006)$

$E(X) = 3$

$D(X) = 3 \times 0.994 = 2.982$

(1) 收：$500 \times 800 = 400000$(元)

$\frac{400000}{50000} = 8$ (辆).

$$P\{X \geq 8\} = P\left\{\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \geq \frac{8-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\}$$

$$\approx 1 - \phi\left(\frac{5}{\sqrt{2.982}}\right) = 1 - \phi(2.90)$$

$= 0.0019$

(2) $P\{X \leq 4\} = P\left\{\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \leq \frac{4-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right\}$

$= P\left\{\frac{X-3}{\sqrt{2.982}} \leq \frac{1}{\sqrt{2.982}}\right\}$

$\approx \phi\left(\frac{1}{\sqrt{2.982}}\right) = \phi(0.58)$

$= 0.719$

4．设总体X服从泊松分布$P(\lambda)$，$\bar{X}$是容量为n的样本的均值，求$E(\bar{X}),D(\bar{X})$。

解：由题可知，$E(X_i)=\lambda$，$D(X_i)=\lambda$.

$\therefore E(\bar{x})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot\lambda=\lambda$

$D(\bar{x})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\lambda=\frac{\lambda}{n}$

5．设$X_1,X_2,\cdots X_n$是来自总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本,其样本均值与样本方差分别为$\bar{X}$，S^2，求$E(\bar{X}+S^2),D(\bar{X}+S^2)$。

解：~~$E(\bar{X}+S^2)$~~

由题得：$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$

$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$　　$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

$E(\bar{x})=\mu$，$D(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$

$\therefore E(\bar{x}+S^2)=E(\bar{x})+\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2)$

$=\mu+\frac{1}{n-1}\cdot E(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2)$

$=\mu+\frac{1}{n-1}(n\mu+n\sigma^2-n\mu-\sigma^2)$

$=\mu+\sigma^2$

$D(\bar{x}+S^2)=D(\bar{x})+D(S^2)=\frac{\sigma^2}{n}+E((S^2)^2)-(E(S^2))^2$

$=\frac{\sigma^2}{n}-\sigma^4+E((S^2)^2)$

$=\frac{\sigma^2}{n}+\frac{2\sigma^4}{n-1}$

6．设总体X服从正态分布$N(0,1)$，$X_1,X_2,\cdots X_n$是样本，又设$Y=(X_1+X_3+X_5)^2+(X_2+X_4+X_6)^2$，试确定常数C，使CY服从$\chi^2$分布。

解：由题得：$X_i\sim N(0,1)$，由正态分布可加性知.

$\therefore X_1+X_3+X_5$与$X_2+X_4+X_6\sim N(0,3)$

为使CY服从χ^2分布，即使$X_1+X_3+X_5\sim N(0,1)$

$X_2+X_4+X_6\sim N(0,1)$

$\therefore C=\frac{1}{3}$

7．设总体X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots X_n,X_{n+1}$是样本，又设

$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，试证明：$T=\frac{X_{n+1}-\bar{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1)$分布。

解：

证明：由题可知X_{n+1}，$\bar{x}$与S_n^2三者相互独立.

由$\bar{x}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$　$X_{n+1}\sim N(\mu,\sigma^2)$

$\therefore X_{n+1}-\bar{x}\sim N(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2)$

$\therefore \sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{X_{n+1}-\bar{x}}{\sigma}\sim N(0,1)$.

又$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2\sim\chi^2(n-1)$

且$X_{n+1}-\bar{x}$与S^2独立.

$\therefore T=\frac{\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot\frac{X_{n+1}-\bar{x}}{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2}{n-1}}}$

$=\frac{X_{n+1}-\bar{x}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1)$

专业：[redacted] 班级：[redacted] 姓名：[redacted] 学号：[redacted]

1. 设某种清漆的 9 个样品，其干燥时间（单位：小时）分别为 6.0 5.7 5.8 6.5 7.0 6.3 5.6 6.1 5.0，设干燥时间总体服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间。1）若由以往经验知 $\sigma=0.6$ 小时；2）若 σ 为未知。

解：(1) $\bar{x}=6$

$\frac{\bar{x}-\mu}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

$P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\bar{x}-\mu}{6/\sqrt{n}} \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.95$

∴ 置信区间为 $[\bar{x}-z_{\alpha/2}\frac{6}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\alpha/2}\frac{6}{\sqrt{n}}]$，代入数据得：$[5.608,\ 6.392]$

(2) $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$. $S^2=0.33$

置信区间 $[\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}]$

代入数据得：

$[5.558,\ 6.442]$

2. 随机地取某种炮弹 9 发做试验，得炮口速度的样本标准差 $s=11m/s$。设炮口速度总体服从正态分布，求这种炮弹的炮口速度的标准差 σ 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：~~$\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$~~

~~$P \ \sigma \ t_{1-\alpha}(n-1)$~~

$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

$\chi^2_{0.025}(8)=17.535$ $\chi^2_{0.975}(8)=2.18$

$P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \le \frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)=0.95$

$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)=0.95$

σ^2 置信区间为 $[55.2,\ 444]$

σ 的置信区间为 $[7.43,\ 21.07]$

3. 某厂生产一批金属材料，其抗弯强度服从正态分布，今从这批金属材料中随机抽取 11 个试件，测得它们的抗弯强度（单位：公斤）为 42.5 42.7 43.0 42.3 43.4 44.5 44.0 43.8 44.1 43.9 43.7，求：(1) 平均抗弯强度 μ 的置信度为 0.95 的单侧置信上限。

(2) 抗弯强度标准差 σ 的置信度为 0.90 的单侧置信下限。

解：$\bar{x}=43.445$ $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

$S^2=0.52$.

(1) $P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \ge t_\alpha\right)=1-\alpha=0.95$

$\mu \le \bar{x}+t_{0.05}(10)\frac{S}{\sqrt{10}}=43.86$.

∴ 单侧置信上限为 43.86 kg

~~(2) $P\left(\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}} \le t_\alpha\right)=1-\alpha$~~ $=0.9$.

~~$\mu \ge$~~

(2) $\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$.

$P\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 \le \chi^2_\alpha(n-1)\right)=1-\alpha=0.9$.

$\sigma^2 \ge \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_\alpha(n-1)}=0.325$.

$\sigma \ge 0.57$.

∴ σ 的单侧置信下限为 0.57.

4．假设 0.50, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值，已知 $Y=\ln X \sim N(\mu,1)$。求：1）$E(X)$（记 $E(X)$ 为 b）；2） μ 的置信度为 0.95 的置信区间；3）利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间。

解：~~(1) E(X)~~

(1) 由题可知 $Y\sim N(\mu,1)$ 的正态分布，且 $X=e^Y$

$\because x>0$ 且 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}\cdot e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2}}$

$$\therefore E(X)=\int_0^{+\infty} f(x)\cdot x\,dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}de^y$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\cdot e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}dy=e^{\mu+\frac{1}{2}}$$

(2) 由 Y 的样本均值 $\bar{Y}=0$，由于 σ 已知，采用 $\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

$\therefore \mu$ 的置信区间为 $[\bar{Y}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{Y}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$

代入得：$[-0.97, 0.97]$

(3) $b=e^{\mu+\frac{1}{2}}$

$\therefore$ 置信区间

为 $[e^{-0.47}, e^{1.47}]$

5. 设来自总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 容量为 15 的样本的样本均值为 14.6，样本方差为 1；来自总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的容量为 20 的样本的样本均值为 13.2，样本方差为 1.21，

1）若两总体方差已知为 1，求均值差的置信度为 0.98 的置信区间；

2）若两总体方差未知相等，求均值差的置信度为 0.98 的置信区间；

3）求两总体方差比的 0.98 的置信区间.

解：$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$　　$\bar{x}=14.6$　$\bar{y}=13.2$　~~$\sigma_1^2=\sigma_2^2=1$~~

(1) $P\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\le\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\le z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\alpha=0.98$

$P\left((\bar{X}-\bar{Y})-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\le\mu_1-\mu_2\le(\bar{X}-\bar{Y})-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$

代入数据得：$[0.604, 2.196]$

(2) $S_1^2=1$，$S_2^2=1.21$

$P\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-1)\le\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-1)\right)=1-\alpha=0.98$

$S_W=\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$

代入数据得：$[0.32, 2.28]$

(3) $\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\sim F(n-1,m-1)$

$P\left(F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\le\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\le F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right)=1-\alpha=0.98$

$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}$

代入数据得：$[0.26, 2.89]$

专业：[redacted] 班级：[redacted]；姓名：[redacted] 学号：[redacted]

1．某厂生产的某种型号的电池，其使用寿命长期以来服从方差 $\sigma^2 = 5000h^2$ 的正态分布，今从一批这种型号的电池中随机抽取２６只，测得其寿命的样本方差为 $9200h^2$，问这批电池的寿命的方差较以往有无显著变化（$\alpha = 0.02$）？

解：$H_0: \sigma^2 = 5000 \quad H_1: \sigma^2 \neq 5000$

$\frac{n-1}{\sigma^2}s^2 \sim \chi^2(n-1)$ 拒绝域为 $\left\{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \text{ 或 } \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$

$\frac{n-1}{\sigma^2}s^2 = 46$

$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(25) = 44.314 < 46$

∴有显著变化.

2．某地区从1990年新生的女孩中随机选取20人测量体重，测得20个女孩的平均体重为 $3160\,g$，样本标准差为 $200\,g$，而根据1990年的统计资料知，新生女孩的平均体重为 $3140\,g$，假设新生女孩的体重服从正态分布. 问1990年的新生女孩与以前的新生女孩比较，平均体重是否偏大？（$\alpha = 0.02$）

解：$H_0: \mu \geq 3140 \quad H_1: \mu < 3140$ $\quad t_{(1-\alpha)}(19) =$

$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

拒绝域为 $\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} < t_{1-\alpha}(n-1)\right\}$ ∴平均体重偏大

$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} =$

3．今有一批钢材，其屈服点X服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 与 σ^2 均未知. 今随机地抽取16个样本，得样本均值 $\bar{x} = 5.36$，样本方差 $s^2 = (0.2203)^2$. 问可否认为总体均值 $\mu = 5$？（$\alpha = 0.05$）

$t_{\frac{\alpha}{2}}(15) = 2.1315$

解：$H_0: \mu = 5 \quad H_1: \mu \neq 5$.

$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$.

拒绝域为 $\left\{\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| > t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$

$\left|\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}\right| = 6.54 > 2.1315$ ∴不能认为总体均值 $\mu = 5$.

4．某种导线，要求其电阻的标准差不得超过 0.005 欧姆。今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 $s=0.007$ 欧姆，设总体服从正态分布，参数均未知。问在水平 $\alpha=0.05$ 下能否认为这批导线的标准差显著地偏大？

解：$H_0: \sigma^2 \le 0.005$. $H_1: \sigma^2 \ge 0.005$.　　∴显著偏大

$\frac{(n-1)}{\sigma^2}S^2 \sim \chi^2(n-1)$

拒绝域 $\left\{\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 > \chi^2_\alpha(n-1)\right\}$.

$\frac{n-1}{\sigma^2}S^2 = \frac{8\times 49}{25} = 15.68$

$\chi^2_{0.05}(8) = 15.507$.

5. 有两台机器生产的产品中各抽取容量为 $n_1=40, n_2=40$ 的样本，测得两组样本的样本方差比为 1.55. 设两样本相互独立，总体分别为 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$、$N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的正态分布，试在水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：$H_0:\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$　　$H_1:\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

解：$\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$.

~~拒绝域~~ $\cancel{\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > F_\alpha(n_1-1, n_2-1)\right\}}$.

$\cancel{\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = }$ ×

拒绝域 $\left\{\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_\alpha(n_1-1, n_2-1)\right\}$.

$\frac{S_1^2}{S_2^2} = 1.55$.

$F_{0.05}(19,19) = 1.69$.

∴ H_0成立.

专业：[redacted] 班级：[redacted] 姓名：[redacted] 学号：[redacted]

一. 选择题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 λ 的泊松分布的样本，下列统计量中，哪个不是 λ 的无偏估计量？ (B)

A. $\overline{X}$ B. S C. $k\overline{X}+(1-k)S^2$，$0<k<1$ D. $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$

2. 设总体 X 的期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在，X_1, X_2, X_3 是取自总体 X 的一个样本，请从下面的统计量中，找出总体 X 期望的最有效的无偏估计量. (B)

A. $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$ B. $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

C. $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{1}{12}X_3$ D. $\frac{1}{5}X_1+\frac{1}{5}X_2+\frac{3}{5}X_3$

3. 设总体 X 的数学期望 μ 和方差 σ^2 存在，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的样本，则下面的统计量中可作为 σ^2 的无偏估计的是： (A)

A.当 μ 已知时，统计量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；B.当 μ 已知时，统计量 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；

C.当 μ 未知时，统计量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$；D.当 μ 未知时，统计量 $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

二. 计算题

1. 设总体 X 的概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1 \\ 0, & 其它\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，求参数 θ 的矩估计和极大似然估计.

解：$E(X)=\int_0^1 \theta x^{\theta-1}\cdot x\,dx = \frac{\theta}{1+\theta}$

令 $E(X)=\overline{x}$，则 $\frac{\theta}{1+\theta}=\overline{x}$

$\therefore \hat{\theta}=\frac{\overline{x}}{1-\overline{x}}$ (矩估计)

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta\cdot x_i^{\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1}$

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}x_i$

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$

$\therefore \hat{\theta}=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$ (极大似然估计)

2. 设总体 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta, \\ 0, & \text{else}. \end{cases}$$

证明 θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}=\min\{x_i\}$.

证明：$L(\theta)=e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}$，$x_i\ge\theta, i=1,\cdots,n$

可见 $L(\theta)$ 关于 θ 单调递增.

∴当 θ 取最大值时，$L(\theta)$ 达到极大.

而 $x_i\ge\theta$，$i=1,\cdots,n$. 因此 $\theta\le\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\Rightarrow\hat{\theta}=\min\{x_i\}$.

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本，设 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$. 确定常数 C 使 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

解：$E\left[C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=C\sum_{i=1}^{n-1}(EX_{i+1}^2+EX_i^2-2EX_{i+1}EX_i)$

$=2C(n-1)\sigma^2$

∴ $2C(n-1)=1$

∴ $C=\frac{1}{2(n-1)}$

4. 一批产品中含有废品，今从中随机抽取 85 只，发现废品 5 只。试用极大似然估计废品率。

解：令总体 $X\sim B(1,p)$.

$P(X_i=x_i)=p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

∴ $L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}$

$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\ln(1-p)$

$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{1-p}(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)=0$

$\frac{1}{p}\cdot 5-\frac{1}{1-p}(85-5)=0$

∴ $\hat{p}=\frac{1}{17}$（极大似然估计）

5. 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 为参数 θ 的两个独立的无偏估计量，且假定 $D\hat{\theta}_1=2D\hat{\theta}_2$，求常数 c 和 d，使 $\hat{\theta}=c\hat{\theta}_1+d\hat{\theta}_2$ 为 θ 的无偏估计，并使方差 $D\hat{\theta}$ 最小。

解：由题意得：$E(\hat{\theta})=(c+d)\theta=\theta$

∴ $c+d=1$

$D(\hat{\theta})=c^2D(\hat{\theta}_1)+d^2D(\hat{\theta}_2)=(2c^2+d^2)D(\hat{\theta}_2)$

把 $c+d=1$ 代入得：$(3c^2-2c+1)D(\hat{\theta}_2)$

当该式取最小值时 $c=\frac{-2}{-6}=\frac{1}{3}$

∴ $d=\frac{2}{3}$

∴ $\begin{cases} c=\frac{1}{3} \\ d=\frac{2}{3} \end{cases}$

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 $N(0,1)$ 的样本，样本均值为 $\bar{X}$，

记 $Y_i = X_i - \bar{X}$，

求：1）$D(Y_i)$；2）$\mathrm{cov}(Y_1, Y_n)$；

3）若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，确定 c

4）求 $P(Y_1+Y_n<0)$

$E(X_i)=0.$

$E(\bar{X})=0.$

$D(\bar{X})=\frac{1}{n}$

$D(X_i)=1$

解：(1) $D(Y_i) = D(X_i - \bar{x})$

$= D(X_i) + D(\bar{x})$

$= 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$

(2) $\mathrm{cov}(Y_1, Y_n) = \cancel{E(Y_1 Y_n) - E}$

$E(Y_1 Y_n) - E(Y_1)E(Y_n)$

$= E((x_1-\bar{x})(x_n-\bar{x})) - E(x_1-\bar{x})E(x_n-\bar{x}) = E(\bar{x}^2) - E(\bar{x})$

$= E(\bar{x}^2) = D(\bar{x}) + E^2(\bar{x}) = \frac{1}{n}$

(3) $E(c(Y_1+Y_n)^2) = cE((Y_1+Y_n)^2)$

$= cE(Y_1^2 + Y_n^2 + 2Y_1Y_n)$

$= cE(Y_1^2) + cE(Y_n^2) + 2cE(Y_1Y_n)$

$= c\left(\frac{n+1+n+1+2}{n}\right) = \sigma^2$

$\therefore c = \frac{n\sigma^2}{2n+4}$

(4) $P(Y_1+Y_n<0) = P(x_1+x_n-2\bar{x}<0) = P\left(\bar{x} > \frac{x_1+x_n}{2}\right)$

$= 1 - \phi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$